Les équations de Navier-Stokes : où en est-on après un siècle de recherches ?

Isabelle Gallagher

Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris-Diderot

Fête de la Science, le 21 novembre 2009

Les équations de Navier-Stokes

- Les équations de Navier-Stokes : ce qu'elles modélisent, comment elles s'écrivent.
- L'intérêt physique de l'étude mathématique de ces équations.
- Les difficultés mathématiques de leur étude.
- Quelques résultats mathématiques, et leur intérêt physique.
- L'application de ces études à la géophysique et l'océanographie.

Les équations de Navier-Stokes

- Les équations de Navier-Stokes : ce qu'elles modélisent, comment elles s'écrivent.
- L'intérêt physique de l'étude mathématique de ces équations.
- Les difficultés mathématiques de leur étude.
- Quelques résultats mathématiques, et leur intérêt physique.
- L'application de ces études à la géophysique et l'océanographie.

Les équations de Navier-Stokes

- Les équations de Navier-Stokes : ce qu'elles modélisent, comment elles s'écrivent.
- L'intérêt physique de l'étude mathématique de ces équations.
- Les difficultés mathématiques de leur étude.
- Quelques résultats mathématiques, et leur intérêt physique.
- L'application de ces études à la géophysique et l'océanographie.

Les équations de Navier-Stokes

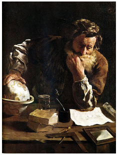
- Les équations de Navier-Stokes : ce qu'elles modélisent, comment elles s'écrivent.
- L'intérêt physique de l'étude mathématique de ces équations.
- Les difficultés mathématiques de leur étude.
- Quelques résultats mathématiques, et leur intérêt physique.
- L'application de ces études à la géophysique et l'océanographie.

Les équations de Navier-Stokes

- Les équations de Navier-Stokes : ce qu'elles modélisent, comment elles s'écrivent.
- L'intérêt physique de l'étude mathématique de ces équations.
- Les difficultés mathématiques de leur étude.
- Quelques résultats mathématiques, et leur intérêt physique.
- L'application de ces études à la géophysique et l'océanographie.

La mécanique des fluides

La **mécanique des fluides** est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz), qui perdent leur forme au cours du temps, par opposition aux solides qui la gardent.



Leur étude remonte à la Grèce antique, avec **Archimède** : (287-212 BC) Géomètre, Ingénieur, Physicien

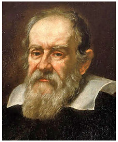
On peut citer aussi **Héron d'Alexandrie** (10-70) qui a étudié la **pression** des gaz. Il construit des machines à vapeur, et des automates de théâtre.

La mécanique des fluides

Au 15$^{\text{ème}}$ siècle, Leonardo da Vinci (1452-1519) est pionnier dans l'étude de la mécanique des fluides.

Il propose de nombreuses descriptions d'écoulements (jets, tourbillons, ondes de surface) et formule (après Héron d'Alexandrie) le principe de conservation de la masse.

La mécanique des fluides



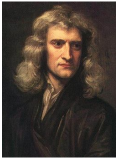
Au $16^{\text{ème}}$ siècle, le développement de l'algèbre rend possible une plus grande mathématisation de la physique. Par exemple **Galilée** (1564-1642) s'intéresse à la **mécanique céleste**, et étudie notamment le mouvement de la Lune, des planètes.

La philosophie est écrite dans ce grand livre — je veux dire l'univers — qui est en permanence sous notre regard, mais il ne peut être compris que si l'on apprend d'abord le langage et interprète les symboles avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans le langage des mathématiques, et ses symboles sont triangles, cercles et autres figures géométriques sans lesquels il est humainement impossible d'y comprendre un seul mot ; sans eux, on erre dans un labyrinthe obscur.

Galilée, l'Essayeur, 1616.

La mécanique des fluides

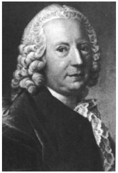
Dans *Principia mathematica* (1687), Isaac **Newton** pose les fondements de la **mécanique classique**, qui restera valable jusqu'en 1905 avec Einstein et la relativité restreinte.



- loi fondamentale de la dynamique : $F = ma$
- loi de la gravitation universelle.

Cela lui permet de démontrer des lois empiriques découvertes auparavant (par **Kepler** notamment) pour le mouvement des planètes.

Puis en 1738, Daniel **Bernoulli** étudie les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la **conservation de l'énergie**.



La mécanique des fluides

En 1748, l'Académie des sciences de Berlin propose le **Prix de Mathématiques** pour l'année 1750 :

Déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide.

Jean d'Alembert, mathématicien et philosophe français, soumet le 25 novembre 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique.

L'académie lui refuse le prix, qui est attribué à un protégé de Leonhard Euler, un certain Jacques Adami (dont le manuscrit a aujourd'hui disparu).

Les contributions de d'Alembert en hydrodynamique

- L'introduction de dérivées partielles

tout d'abord Leibniz :

- calcul des fonctions à plusieurs variables
- calcul différentiel

suivi par les Bernoulli

 (Jean)  (Jacques)  (Nicolas)

puis Fontaine, Clairaut et enfin d'Alembert.

- La notion de pression interne d'un fluide
- La notion de champ de vitesses

Euler, Navier et Stokes

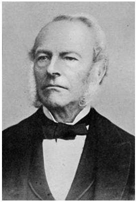
- Les équations d'Euler

mathématicien suisse, établit ces équations, telles qu'on les connait aujourd'hui, pour un fluide non visqueux en 1755

- Le paradoxe de d'Alembert

- Les équations de Navier-Stokes

mathématiciens français et irlandais, établissent ces équations pour un fluide visqueux en 1820-1845



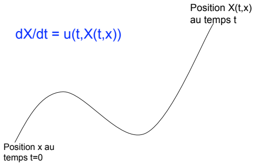
Les équations

- La contrainte d'incompressibilité : Le flux à travers n'importe quel volume de fluide doit être nul.

  Par la formule de Stokes, si u est la vitesse du fluide, alors u doit être de **divergence nulle** :

$$\nabla \cdot u := \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u^j}{\partial x_j} = 0.$$

- Les inconnues :



la **vitesse** $u(t,x)$ et la **pression** $p(t,x)$ du fluide au temps t au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de l'espace *(on ne suit pas les particules)*.

Ici u est un vecteur : $u = (u_1, u_2, u_3)$ et p est une fonction.

Les équations

Les équations du mouvement :

$$\underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 g}_{\text{gravité}}$$

∇ *est le vecteur de dérivation par rapport aux trois variables* (x_1, x_2, x_3).

Il s'agit d'un **système d'équations aux dérivées partielles**.

Les équations

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 g}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\nabla \cdot u = 0}_{\text{incompressibilité}} \end{cases}$$

∇ *est le vecteur de dérivation par rapport aux trois variables* (x_1, x_2, x_3).

Il s'agit d'un **système d'équations aux dérivées partielles**.

Les équations

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u}_{\text{accélération}} \underbrace{- \nu \Delta u}_{\text{diffusion}} = \underbrace{- \nabla p}_{\text{pression}} + \underbrace{\rho_0 g}_{\text{gravité}} \\ \underbrace{\nabla \cdot u = 0}_{\text{incompressibilité}} \end{cases}$$

∇ *est le vecteur de dérivation par rapport aux trois variables* (x_1, x_2, x_3), et Δ correspond à deux dérivations.

Il s'agit d'un **système d'équations aux dérivées partielles**.

Etude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du $19^{\text{ème}}$ siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules explicites donnant une fonction satisfaisant les équations considérées.

- On s'est rapidement aperçu de la difficulté d'obtenir des solutions analytiques exactes.

- On a cherché des **solutions approchées** sous forme de séries (puissances, trigonométriques...), ou sous forme d'approximations de solutions connues (méthodes perturbatives).

- On a construit des méthodes générales de **résolution d'équations aux dérivées partielles**.

Etude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du 19ème siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules explicites donnant une fonction satisfaisant les équations considérées.
- On s'est rapidement aperçu de la difficulté d'obtenir des solutions analytiques exactes.
- On a cherché des **solutions approchées** sous forme de séries (puissances, trigonométriques...), ou sous forme d'approximations de solutions connues (méthodes perturbatives).
- On a construit des méthodes générales de **résolution d'équations aux dérivées partielles**.

Etude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du $19^{\text{ème}}$ siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules explicites donnant une fonction satisfaisant les équations considérées.
- On s'est rapidement aperçu de la difficulté d'obtenir des solutions analytiques exactes.
- On a cherché des **solutions approchées** sous forme de séries (puissances, trigonométriques...), ou sous forme d'approximations de solutions connues (méthodes perturbatives).
- On a construit des méthodes générales de **résolution d'équations aux dérivées partielles**.

Etude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du 19ème siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules explicites donnant une fonction satisfaisant les équations considérées.
- On s'est rapidement aperçu de la difficulté d'obtenir des solutions analytiques exactes.
- On a cherché des **solutions approchées** sous forme de séries (puissances, trigonométriques...), ou sous forme d'approximations de solutions connues (méthodes perturbatives).
- On a construit des méthodes générales de **résolution d'équations aux dérivées partielles**.

Résolution d'équations aux dérivées partielles : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité) :

  existence : si on fait une expérience, on peut l'observer aussi longtemps que l'on veut ;

  unicité : si on la fait deux fois on doit observer la même chose (déterminisme)

  stabilité : si on approxime les données ou l'équation, la solution ne doit pas être très modifiée.

Résolution des équations aux dérivées partielles : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité)
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions
- Donner un cadre d'étude valable pour de nombreuses équations "du même type".
- En cas d'échec, tenter d'utiliser au mieux la **forme particulière** de l'équation.
- **Simplifier** les équations (par exemple en présence de petits ou de grands paramètres).

Résolution des équations aux dérivées partielles : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité)
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions
- Donner un cadre d'étude valable pour de nombreuses équations "du même type".
- En cas d'échec, tenter d'utiliser au mieux la **forme particulière** de l'équation.
- **Simplifier** les équations (par exemple en présence de petits ou de grands paramètres).

Résolution des équations aux dérivées partielles : le point de vue du mathématicien

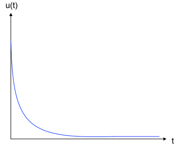
- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité)
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions
- Donner un cadre d'étude valable pour de nombreuses équations "du même type".
- En cas d'échec, tenter d'utiliser au mieux la **forme particulière** de l'équation.
- **Simplifier** les équations (par exemple en présence de petits ou de grands paramètres).

Résolution des équations aux dérivées partielles : le point de vue du mathématicien

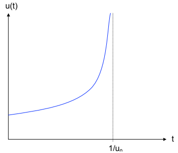
- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité)
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions
- Donner un cadre d'étude valable pour de nombreuses équations "du même type".
- En cas d'échec, tenter d'utiliser au mieux la **forme particulière** de l'équation.
- **Simplifier** les équations (par exemple en présence de petits ou de grands paramètres).

- Exemples d'équations différentielles ordinaires

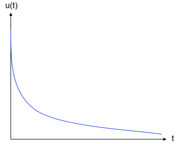
1. $\partial_t u + au = 0$
solution $u(t) = u_0 e^{-at}$ avec $u_0 = u(t = 0)$.
Solution globale qui tend vers zéro en grand temps.



2. $\partial_t u - u^2 = 0$
solution $u(t) = \dfrac{u_0}{1 - u_0 t}$ avec $u_0 = u(t = 0)$.
Explosion en temps fini : $T^* = 1/u_0$.



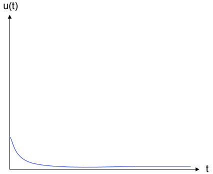
3. $\partial_t u + u^2 = 0$
solution $u(t) = \dfrac{u_0}{1 + u_0 t}$ avec $u_0 = u(t = 0)$.
Solution globale qui tend vers zéro en grand temps.

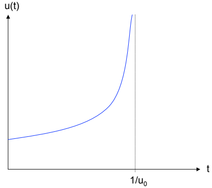


4. $\partial_t u + au - u^2 = 0$

conflit entre les situations **1** et **2**.

Si u_0 est **petit** (par exemple si $u_0 < a/2$) alors $u^2 < au/2$ donc "le linéaire l'emporte". **Sinon** "le non linéaire l'emporte" et la solution peut exploser en temps fini.





Le problème de Cauchy

▸ Quelques résultats

Travaux mathématiques fondateurs de **Jean Leray** en 1934.

Les recherches se poursuivent encore aujourd'hui.

On peut citer Fujita et Kato (1964), Cannone, Meyer et Planchon (1994), Koch et Tataru (2001).

Leurs travaux ont consisté à chercher à obtenir la plus grande classe possible de données initiales garantissant l'existence et l'unicité de solutions, au moins en temps court.

Le problème de Cauchy

▸ Quelques résultats

Travaux mathématiques fondateurs de **Jean Leray** en 1934.

Les recherches se poursuivent encore aujourd'hui.

On peut citer Fujita et Kato (1964), Cannone, Meyer et Planchon (1994), Koch et Tataru (2001).

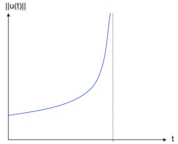
En général les solutions (uniques et stables) des équations de Navier-Stokes existent **en temps court** ; l'existence globale n'est connue que pour de **petites données initiales**.

La **conservation de l'énergie** permet d'obtenir des solutions globales, mais sans unicité. En **dimension deux** les deux théories se rejoignent (existence et unicité pour tous les temps).

Le problème de Cauchy

▸ Quelques questions ouvertes

La question à $\$1,000,000$ de la **Fondation Clay** est de savoir si pour une donnée initiale quelconque (aussi régulière que nécessaire, mais de taille arbitraire) il y a une **unique solution globale en temps**, ou si une **explosion en temps fini** peut avoir lieu pour certaines données.



L'**unicité des solutions de Leray** est aussi un problème ouvert. Dans le cas des **équations d'Euler** ($\nu = 0$) il a été montré la **non unicité** des solutions faibles (Scheffer 1993 ; Shnirelman 1997).

Que disent les numériciens ? Et les physiciens ?

Quelques **simulations numériques** suggèrent qu'il pourrait y avoir **apparition de singularités** en temps fini mais il est difficile de s'y fier pour prédire un résultat théorique.

D'un **point de vue physique**, si l'explosion en temps fini est avérée alors

- Les solutions explosives seront certainement instables.
- Quand le temps se rapproche du temps d'explosion, la vitesse augmente tellement qu'il est temps de changer de modèle... !

Que disent les numériciens ? Et les physiciens ?

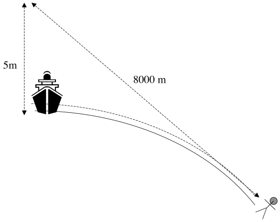
Quelques **simulations numériques** suggèrent qu'il pourrait y avoir **apparition de singularités** en temps fini mais il est difficile de s'y fier pour prédire un résultat théorique.

D'un **point de vue physique**, si l'explosion en temps fini est avérée alors

- Les solutions explosives seront certainement instables.
- Quand le temps se rapproche du temps d'explosion, la vitesse augmente tellement qu'il est temps de changer de modèle... !

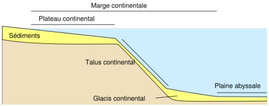
L'océan, un système complexe

- Par sa géométrie



Courbure terrestre

Découpe des côtes

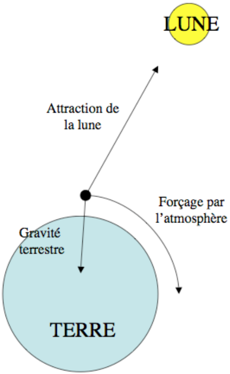


Relief sous-marin

L'océan, un système complexe

- Par ses couplages

  - Attraction de la lune
  - Gravité terrestre
  - Forçage par l'atmosphère

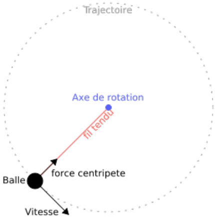


L'océan, un système complexe

- Par la superposition de nombreux mouvements
  - Echelle planétaire : rotation de l'océan avec la Terre
  - Echelle $\sim$ 1000 km :
    grands courants (Gulf Stream, Kuroshio)
    phénomènes quasi périodiques (El Niño)
  - Echelle $\sim$ 10 km :
    marées, houle, déferlement des vagues
    phénomènes localisés dans le temps (raz de marée)

Les phénomènes observés

On s'intéresse au mouvement **relatif** des océans par rapport à la Terre.
La rotation de la Terre produit deux effets supplémentaires :



Force centripète

Force de Coriolis

Les phénomènes observés

▸ Choix de l'échelle

On s'intéresse au mouvement des océans **à grande échelle** :

- échelle horizontale ~ 1000 km
- échelle verticale ~ 10 km

Dans ce cadre, il est pertinent - en première approximation -

- de considérer une géométrie simplifiée (bords réguliers) ;
- de négliger les couplages (hors gravité terrestre).

Mise en équations

- Équations de la mécanique des fluides géophysiques
  - Les inconnues : comme précédemment, la vitesse $u(t,x)$ et la pression $p(t,x)$ de l'eau au temps t au point $x = (x_1, x_2, x_3)$.
  - Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u - \nu \Delta u = \underbrace{-\nabla p}_{\text{pression et force centripète}} + \rho_0 g + \underbrace{\rho_0 u \wedge \omega}_{\text{force de Coriolis}} \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un système très proche des équations de Navier-Stokes. En particulier le terme supplémentaire est **antisymétrique** $(\rho_0 u \wedge \omega \cdot u = 0)$ et donc n'intervient pas dans l'énergie.

- Effet de la force de Coriolis (dominant aux grandes échelles)

Latitudes moyennes : **Effet stabilisant** lié à la présence d'ondes de Poincaré *(Grenier, Babin-Mahalov-Nicolaenko, Gallagher, Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier, fin des années 90)*

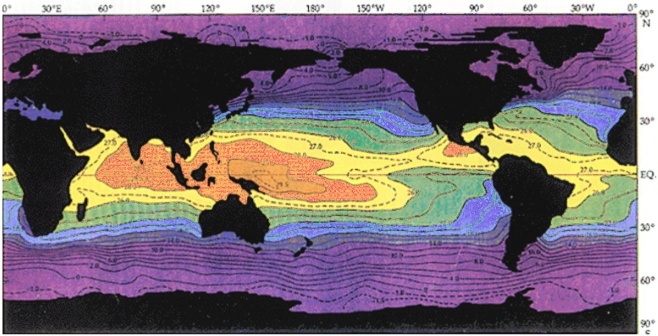
Les solutions tendent à ne **plus dépendre de la troisième variable** quand la vitesse de rotation tend vers l'infini ; on est donc ramené au cas de la dimension deux pour lequel on sait que les équations sont bien posées.

Résultats mathématiques

- Effet de la force de Coriolis (dominant aux grandes échelles)

Zone équatoriale : Difficulté supplémentaire due au changement d'orientation de la force de Coriolis
(Gallagher-Saint Raymond 2006)
(Dutrifoy-Majda-Schochet 2006-2007)

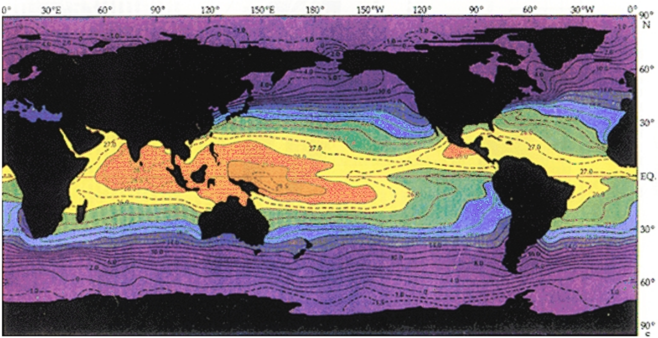
Les variations de la force de Coriolis induisent un comportement particulier au voisinage de l'équateur.



Ondes piégées, de trois types (avec des temps de propagation très différents) :

- Poincaré (rotation),
- Kelvin (gravité),
- Rossby (variations de ω)

Ces ondes **n'interagissent pas** entre elles.



Ondes piégées, de trois types (avec des temps de propagation très différents) :

- Poincaré (rotation),
- Kelvin (gravité),
- Rossby (variations de ω)

Ces ondes **n'interagissent pas** entre elles.

Quelques défis actuels

- Résoudre les équations de Navier-Stokes ($1,000,000)
- Élaborer des modèles complexes
  - Couplage océan-atmosphère (vent, évaporation, ...)
  - Propriétés du fluide (salinité, température, ...)
- Comprendre des phénomènes exceptionnels
  - Introduction aux méthodes statistiques
  - Calcul du mouvement moyen (turbulence)
  - Calcul de la déviation

Quelques défis actuels

- Résoudre les équations de Navier-Stokes ($1,000,000)
- Élaborer des modèles complexes
  - Couplage océan-atmosphère (vent, évaporation, ...)
  - Propriétés du fluide (salinité, température, ...)
- Comprendre des phénomènes exceptionnels
  - Introduction aux méthodes statistiques
  - Calcul du mouvement moyen (turbulence)
  - Calcul de la déviation

Quelques défis actuels

- Résoudre les équations de Navier-Stokes ($1,000,000)
- Élaborer des modèles complexes
  - Couplage océan-atmosphère (vent, évaporation, ...)
  - Propriétés du fluide (salinité, température, ...)
- Comprendre des phénomènes exceptionnels
  - Introduction aux méthodes statistiques
  - Calcul du mouvement moyen (turbulence)
  - Calcul de la déviation

Questions naturelles autour des équations de Navier-Stokes

Peut-on analyser **qualitativement** les solutions ?

- **comportement en grand temps** des solutions globales ?
- **comportement des solutions explosives** au temps d'explosion ?

Sous quelles conditions peut-on garantir **l'existence et l'unicité globale** de solutions ?

Questions naturelles autour des équations de Navier-Stokes

Peut-on analyser **qualitativement** les solutions ?

- **comportement en grand temps** des solutions globales ?
- **comportement des solutions explosives** au temps d'explosion ?

Sous quelles conditions peut-on garantir **l'existence et l'unicité globale** de solutions ?

Questions naturelles autour des équations de Navier-Stokes

Peut-on analyser **qualitativement** les solutions ?

- **comportement en grand temps** des solutions globales ?
- **comportement des solutions explosives** au temps d'explosion ?

Sous quelles conditions peut-on garantir **l'existence et l'unicité globale** de solutions ?

Questions naturelles autour des équations de Navier-Stokes

Peut-on analyser **qualitativement** les solutions ?

- **comportement en grand temps** des solutions globales ?
- **comportement des solutions explosives** au temps d'explosion ?

Sous quelles conditions peut-on garantir **l'existence et l'unicité globale** de solutions ?

Propriétés qualitatives

- Propriétés qualitatives des solutions globales

Si une solution globale unique existe, elle doit **tendre vers zéro** en grand temps (Gallagher-Iftimie-Planchon 2003). Corollaire : l'ensemble des données initiales générant une solution globale unique est **ouvert**.

- Propriétés qualitatives des solutions explosives

Il n'existe pas de **profil d'explosion** de type autosimilaire (Necas-Ruszicka-Sverak 1994), ni plus généralement de solution explosive dont la norme garantissant leur stabilité resterait bornée à l'explosion (Escauriaza-Seregin-Sverak 2003).

Le “lieu” de l'espace-temps où la solution serait non régulière est **très petit** : de volume zéro (Leray) et de “dimension fractale” ≤ 1 (Caffarelli-Kohn-Nirenberg 1982).

Propriétés qualitatives

- Propriétés qualitatives des solutions globales

Si une solution globale unique existe, elle doit **tendre vers zéro** en grand temps (Gallagher-Iftimie-Planchon 2003). Corollaire : l'ensemble des données initiales générant une solution globale unique est **ouvert**.

- Propriétés qualitatives des solutions explosives

Il n'existe pas de **profil d'explosion** de type autosimilaire (Necas-Ruszicka-Sverak 1994), ni plus généralement de solution explosive dont la norme garantissant leur stabilité resterait bornée à l'explosion (Escauriaza-Seregin-Sverak 2003).

Le "lieu" de l'espace-temps où la solution serait non régulière est **très petit** : de volume zéro (Leray) et de "dimension fractale" ≤ 1 (Caffarelli-Kohn-Nirenberg 1982).

Propriétés qualitatives

- Propriétés qualitatives des solutions globales

Si une solution globale unique existe, elle doit **tendre vers zéro** en grand temps (Gallagher-Iftimie-Planchon 2003). Corollaire : l'ensemble des données initiales générant une solution globale unique est **ouvert**.

- Propriétés qualitatives des solutions explosives

Il n'existe pas de **profil d'explosion** de type autosimilaire (Necas-Ruszicka-Sverak 1994), ni plus généralement de solution explosive dont la norme garantissant leur stabilité resterait bornée à l'explosion (Escauriaza-Seregin-Sverak 2003).

Le "lieu" de l'espace-temps où la solution serait non régulière est **très petit** : de volume zéro (Leray) et de "dimension fractale" ≤ 1 (Caffarelli-Kohn-Nirenberg 1982).

Solutions globales

- Exemples de solutions globales associées à de grandes données
  - Force de Coriolis (Babin, Mahalov, Nicolaenko 1996, Gallagher 1998, Chemin, Desjardins, Gallagher, Grenier 2001, Charve 2004).
  - Domaines minces (Raugel, Sell 1994, Iftimie, Raugel 2001).
  - Perturbations de solutions $2D$ (dans le cas périodique ; Iftimie 1997, Gallagher 1997) ou globales (Gallagher, Iftimie, Planchon 2003).
  - Oscillations/dilatations (Chemin-Gallagher 2005-2006).
  - Variations lentes dans une direction (Chemin-Gallagher 2007, Chemin-Gallagher-Paicu 2008).

Solutions globales

- Exemples de solutions globales associées à de grandes données
  - Force de Coriolis (Babin, Mahalov, Nicolaenko 1996, Gallagher 1998, Chemin, Desjardins, Gallagher, Grenier 2001, Charve 2004).
  - Domaines minces (Raugel, Sell 1994, Iftimie, Raugel 2001).
  - Perturbations de solutions $2D$ (dans le cas périodique ; Iftimie 1997, Gallagher 1997) ou globales (Gallagher, Iftimie, Planchon 2003).
  - Oscillations/dilatations (Chemin-Gallagher 2005-2006).
  - Variations lentes dans une direction (Chemin-Gallagher 2007, Chemin-Gallagher-Paicu 2008).

Solutions globales

- Exemples de solutions globales associées à de grandes données
  - Force de Coriolis (Babin, Mahalov, Nicolaenko 1996, Gallagher 1998, Chemin, Desjardins, Gallagher, Grenier 2001, Charve 2004).
  - Domaines minces (Raugel, Sell 1994, Iftimie, Raugel 2001).
  - Perturbations de solutions $2D$ (dans le cas périodique ; Iftimie 1997, Gallagher 1997) ou globales (Gallagher, Iftimie, Planchon 2003).
  - Oscillations/dilatations (Chemin-Gallagher 2005-2006).
  - Variations lentes dans une direction (Chemin-Gallagher 2007, Chemin-Gallagher-Paicu 2008).

Solutions globales

- Exemples de solutions globales associées à de grandes données
  - Force de Coriolis (Babin, Mahalov, Nicolaenko 1996, Gallagher 1998, Chemin, Desjardins, Gallagher, Grenier 2001, Charve 2004).
  - Domaines minces (Raugel, Sell 1994, Iftimie, Raugel 2001).
  - Perturbations de solutions $2D$ (dans le cas périodique ; Iftimie 1997, Gallagher 1997) ou globales (Gallagher, Iftimie, Planchon 2003).
  - Oscillations/dilatations (Chemin-Gallagher 2005-2006).
  - Variations lentes dans une direction (Chemin-Gallagher 2007, Chemin-Gallagher-Paicu 2008).

Solutions globales

- Exemples de solutions globales associées à de grandes données
  - Force de Coriolis (Babin, Mahalov, Nicolaenko 1996, Gallagher 1998, Chemin, Desjardins, Gallagher, Grenier 2001, Charve 2004).
  - Domaines minces (Raugel, Sell 1994, Iftimie, Raugel 2001).
  - Perturbations de solutions $2D$ (dans le cas périodique ; Iftimie 1997, Gallagher 1997) ou globales (Gallagher, Iftimie, Planchon 2003).
  - Oscillations/dilatations (Chemin-Gallagher 2005-2006).
  - Variations lentes dans une direction (Chemin-Gallagher 2007, Chemin-Gallagher-Paicu 2008).

- Remarques

Les techniques évoquées ici peuvent s'appliquer à une grande diversité d'équations aux dérivées partielles d'évolution : les équations de Schrödinger, des ondes non linéaires, de l'océanographie...

En revanche les derniers résultats utilisent tous la **structure de l'équation** ou la **conservation de l'énergie** (cf Montgomery-Smith 2001, Gallagher-Paicu 2008).

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes, il est crucial d'**utiliser le plus possible d'informations** données par les différents termes de l'équation, et par leurs interactions possibles.

Solutions globales

▶ Remarques

Les techniques évoquées ici peuvent s'appliquer à une grande diversité d'équations aux dérivées partielles d'évolution : les équations de Schrödinger, des ondes non linéaires, de l'océanographie...

En revanche les derniers résultats utilisent tous la **structure de l'équation** ou la **conservation de l'énergie** (cf Montgomery-Smith 2001, Gallagher-Paicu 2008).

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes, il est crucial d'**utiliser le plus possible d'informations** données par les différents termes de l'équation, et par leurs interactions possibles.

Quelquse sources

http ://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/publications/exposes/fs-navier.pdf

http ://www.carphaz.com

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Plaine abyssale

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Force de Coriolis

Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, Springer Verlag.

http ://www.cnrs.fr/cw/dossiers/dosclim/rechfran/4theme/roledeLocean/gdimghtml/3fig2p26II.html

Pierre-Louis Viollet,Jean-Paul Chabard,Pascal Esposito, *Mécanique des fluides appliquée*