

04 - Relier d'un trait - 04

04-1 Des points et des traits

Königsberg, 1736 : est-il possible de parcourir la ville en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?

Pour résoudre ce problème, à l'origine de la théorie des graphes, Euler retient l'information essentielle : il y a quatre quartiers séparés par l'eau du fleuve, soit quatre "points" à relier par 7 traits qui symbolisent les ponts.

Le problème devient : sur ce dessin existe-t-il un chemin passant une seule fois par chaque trait ? Ce fut l'amorce de la théorie des graphes.

La réponse d'Euler : combien y a-t-il de points où aboutit un nombre impair de traits ?

Il n'y a de solution que si ce nombre est égal à zéro ou à deux !

- Leonhard Euler (1707-1783)



Expérience sur table :

4-1 Chemins dans un cube

Essayez de construire un cube de 3x3 ou un mur de 2x3, de telle sorte que la ligne rouge soit continue.

Essayez encore en utilisant le moins de circuits droits.

C'est Euler qui a donné naissance à la théorie des graphes avec des problèmes de ce type.

Ici, le problème est en plus de savoir s'il y a des solutions minimales.

Comment prouver qu'il n'y a pas de solution avec aucun circuit droit ?

Comment prouver que toute solution a au moins 3 circuits droits ?

Idea & Realisation: Centre Sciences

Matériel : 30 petits cubes transparents dans lesquels est visualisé

Un trait droit (joignant 2 faces opposées) dans 3 d'entre eux

Un coude (joignant 2 faces voisines) dans 27 d'entre eux.

Le jeu consiste à construire un bloc dans lequel un trait continu par d'un cube et parcourt tous les autres.

L'élasticube concrétise l'une des nombreuses solutions (11 ?)

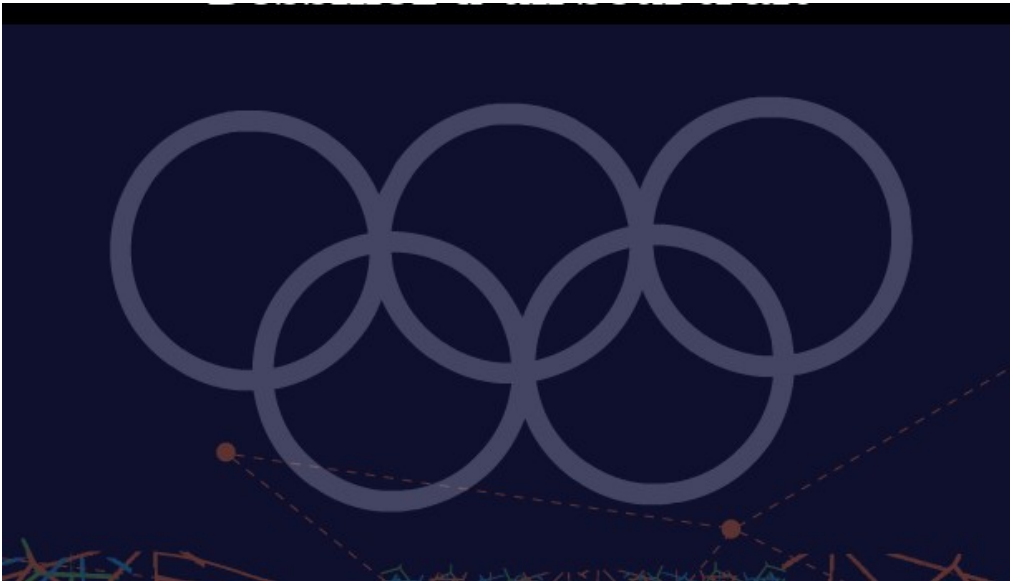
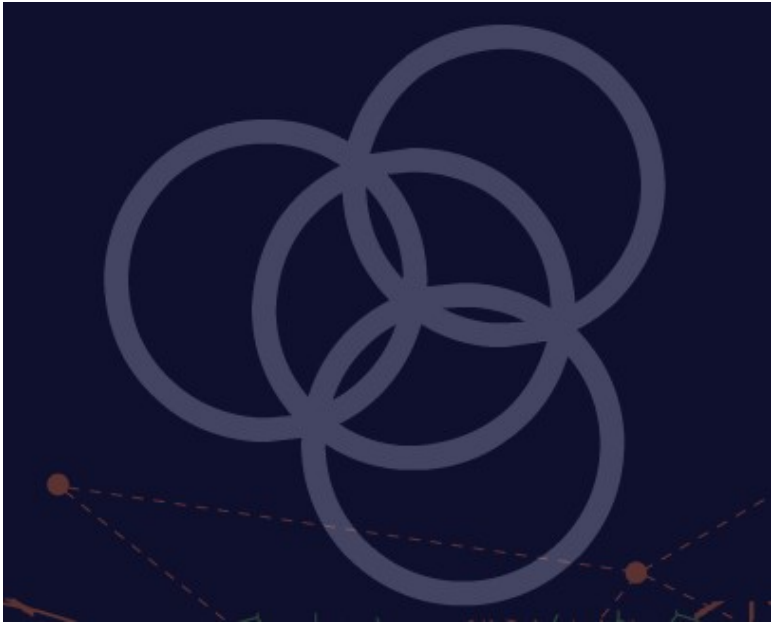
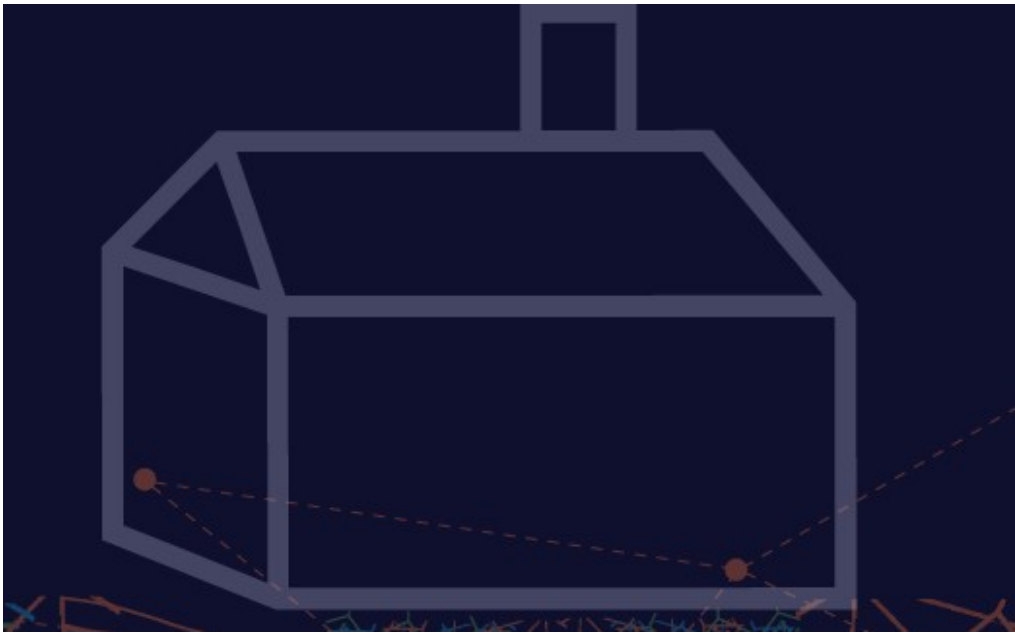
Vous pouvez aussi vous inspirer de

www.ExperiencingMaths.org Se connecter -> d'un seul trait page 1

pour faire dessiner aux plus jeunes (et aux moins jeunes aussi) des figures simples : maison, 2CV,...

ou mieux, reproduire le dessin sur du sable ou une ardoise magique.





04-3 Allo ! M'entends-tu ?

Dans un réseau de communications locales, comment circule votre appel téléphonique ? Il se propage de relais en relais jusqu'au commutateur le plus proche de votre correspondant qui est prévenu par une sonnerie.

Dans une ville, ces nœuds de réseaux sont placés au mieux en tenant compte de la topologie irrégulière des rues. Chaque nœud définit une zone de proximité d'appel sous forme d'un polygone qui est relié aux autres par voisinage. Ces zones définissent un pavage de la ville, appelé mosaïque de Voronoï. Si on relie ces commutateurs entre eux de telle sorte qu'ils appartiennent à des zones voisines, on met en place un graphe qui représente les cables le long desquels l'appel va cheminer. Graphes, probabilités, géométrie s'associent ici pour vous permettre de communiquer dans des conditions optimales !



09 - Prouver - Démontrer - 09

09-1: 3000 ans de recherche

Le doute existe-t-il en mathématiques ? Peut-on s'y satisfaire d'un faisceau de présomptions même si c'est à 99% ?

La démonstration est à la base de l'activité du mathématicien et en fait son originalité. Des premières preuves simples, écrites en quelques lignes, et compréhensibles par un bachelier, nous sommes aujourd'hui passés à des preuves qui représentent des centaines de pages, qui nécessitent l'utilisation d'ordinateurs et qui ne sont vérifiables que par un petit nombre de spécialistes.

La complexité du monde interroge de plus en plus le mathématicien qui doit, pour y répondre, mettre en œuvre des hypothèses et des modèles dont il faut ensuite prouver la pertinence.



09 - Prouver - Démontrer - 09

09-1: 3000 ans de recherche

Le doute existe-t-il en mathématiques ? Peut-on s'y satisfaire d'un faisceau de présomptions même si c'est à 99% ?

La démonstration est à la base de l'activité du mathématicien et en fait son originalité.

Des premières preuves simples, écrites en quelques lignes, et compréhensibles par un bachelier, nous sommes aujourd'hui passés à des preuves qui représentent des centaines de pages, qui nécessitent l'utilisation d'ordinateurs et qui ne sont vérifiables que par un petit nombre de spécialistes.

La complexité du monde interroge de plus en plus le mathématicien qui doit, pour y répondre, mettre en œuvre des hypothèses et des modèles dont il faut ensuite prouver la pertinence.



Comment démontrer des hypothèses qui semblent vraies ? Existe-t-il des nombres entiers tels que $X^2 + Y^2 = Z^2$?

Tels que $X^n + Y^n = Z^n$ pour n supérieur à 2 ?

Les Grecs ont été les premiers à essayer de résoudre de tels problèmes. Ainsi, Pythagore donna son nom au théorème sur "le Carré de l'hypoténuse..." dont Euclide a fourni la plus ancienne preuve connue.



Fermat formule ensuite l'hypothèse que ce résultat n'est pas généralisable. Wiles démontre cette conjecture en 1994 ! Il utilisa pour cela les résultats des plus récentes recherches dans plusieurs domaines des mathématiques.

- Pythagore (6è s. avt J.-C.)
- Euclide (3è s. avt J.-C.)
- Pierre de Fermat (1601-1665)
- Andrew Wiles (Cambridge, 1953)

Expérience sur table

9-2 Cube + Cube + Cube = Cube

Avec ces blocs, construisez 3 cubes de côté 3, 4 et 5.

Puis un gros cube de côté 6.

Et vérifiez que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

Il y a 350 ans, un célèbre mathématicien, Pierre de Fermat affirma que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières pour n entier supérieur ou égal à 3.

Il faudra attendre 1994 pour que l'anglais Andrew Wiles en apporte définitivement la preuve.

Mais si l'on rajoute une inconnue dans l'équation, alors il existe des solutions. Trouvez en d'autres !

Depuis les temps les plus anciens, les nombres et les opérations arithmétiques exercent une fascination. En arithmétique - "la reine des mathématiques" selon Gauss - certaines questions anciennes, comme celles posées par Fermat, s'énoncent très simplement et n'ont toujours pas trouvé de solution.

Idea & Realisation: Centre•Sciences

Coup de pouce :

Comme souvent dans ce type de problème, il faut commencer par le plus compliqué. Ici, il s'agit de loger tous ces blocs dans une enveloppe de $6 \times 6 \times 6$. Il vaut mieux prendre 2 des 3 blocs les plus "gros" et d'essayer de les mettre ds cette enveloppe sans qu'il y ait des petits "trous" impossible à remplir. Cela fait, le reste est un jeu... d'enfant !:=)

Voir aussi www.EXperiencingMaths.org à Prouver - Est-ce bien vrai é page 4

09-3 Vrai mais... indémontrable

Pouvons-nous toujours démontrer quelque chose que nous savons être vrai?

En 1931, Kurt Gödel, dans un véritable coup de théâtre, a répondu par la négative avec son fameux théorème dit "d'incomplétude".

Il a prouvé que les deux notions de vérité et de démontrabilité ne coïncident pas en découvrant une formule sur les nombres entiers qui est vraie mais indémontrable dans l'arithmétique élémentaire.

Plus surprenant, Gödel a aussi montré dans le même esprit qu'en arithmétique, on ne peut ni réfuter ni démontrer qu'on n'aboutira jamais à une contradiction.

L'arithmétique élémentaire est de plus indécidable.

Cela entraîne par exemple qu'il est impossible d'écrire un programme informatique qui vérifierait si une formule quelconque écrite avec des nombres entiers est vrai ou fausse.

• Kurt Gödel (1906-1978)



Expérience sur table

9-3 Carré + Carré = Carré !!!

Faites un carré avec les 4 pièces non carrées.
Puis un autre carré avec les 5 pièces.

Deux carrés peuvent être découpés pour former un seul carré plus grand. C'est le principe de ce puzzle.

Tout polygone peut être découpé en un autre polygone de même aire.

Mais avec ce découpage, est-ce possible ?

(Le problème est plus difficile avec des volumes égaux et n'a que des solutions particulières)

Avec 2 puzzles de ce type, pourriez-vous faire un carré 2 fois plus grand ?

Essayez de le refaire chez vous !

Idea & Realisation: Centre-Sciences

Matériel : 5 pièces de puzzles don't un carré. Avec les 4 autres on peut reconstituer facilement un carré. Pour faire un nouveau carré avec les 5 pièces vous pouvez vous aider du théorème !!!

Coup de pouce :

En plaçant correctement le carré de 4 pièces et le petit carré, on visualise la diagonale du carré recherché. Reste ensuite à le construire.

Vous pouvez aussi montrer comment le fabriquer soi-même (cf ExperiencingMaths.org)

Expérience sur table

4-3 Le Tour du Monde

Choisissez un des 2 polyèdres et trouvez un chemin qui passe une seule fois par chacun des sommets.

Un chemin est hamiltonien s'il passe une seule fois par chacun des sommets. Ce type de problème n'a pas encore trouvé de solution générale.

Hamilton a montré qu'il y a des solutions pour les vingt sommets d'un dodécaèdre régulier (12 faces pentagonales).

En est-il de même pour l'autre dodécaèdre (12 faces losanges) ?

Sur le dessin d'un hypercube, est-il possible de trouver un chemin hamiltonien ?

Rappel : Un chemin est eulérien s'il passe une fois et une seule par chacune des arêtes.

Idea & Realisation: Euler, Hamilton & Centre-Sciences - Illustration : JF Colonna

Le matériel à construire : deux polyèdres à construire avec le matériel envoyé,

- Un dodécaèdre à faces pentagonales

- Un dodécaèdre rhombique à faces losanges (à prendre dans les planches du n°2)

Vous pouvez aussi les construire en respectant le théorème des 4 couleurs (que vous avez en ajoutant les faces blanches)