Flocon de Van Koch – Rallye mathématique 2009

Voir les premières figures dans les pages jointes.

Nombre de côtés (jaune) :

Les côtés se comptent « à la main » pour les premières figures. La figure 1 a trois côtés, si on ne se trompe pas on doit trouver 12 côtés pour la figure 2 et 48 pour la figure 3... Ensuite il devient difficile de ne pas se tromper, ou au moins il est difficile d'être sûr que l'on ne s'est pas trompé.

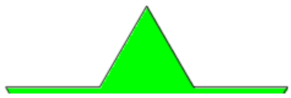
Pour construire la figure 2 chaque côté de la figure 1 a été transformé, on est passé d'un segment à quatre segments . On a donc quadruplé le nombre de côtés. De même pour passer de la figure 2 à la figure 3, à chaque étape on multiplie le nombre de côtés par 4.

Figure n°	n	1	2	3	4	5	6	7	...
Nombre de côtés	c_n	3	12	48	192	768	3072	12288	...

Périmètre (orange) :

Le plus simple est d'utiliser le travail précédent. Dans chaque figure tous les côtés sont égaux, le périmètre est donc égal au nombre de côtés multiplié par la longueur de chaque côté. L'énoncé du problème indique (sur la figure) que la longueur du côté de la figure n°1 est 1.

Compte tenu de la construction, la longueur des côtés de chaque figure est égale au tiers de la longueur des côtés des figures précédentes.

On arrive donc a :

Figure n°	n	1	2	3	4	5	6	7	...
Longueur des côtés	l_n	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	...
Valeur approchée	*(à 0,01 près)*	1,00	0,33	0,11	0,04	0,01	0,00	0,00	...
Nombre de côtés	c_n	3	12	48	192	768	3072	12288	...
Périmètre	$p_n = l_n x\, c_n$	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{1024}{81}$	$\frac{4096}{243}$	...
Valeur approchée	*(à 0,01 près)*	3,00	4,00	5,33	7,67	9,48	12,64	16,86	...

Pour les plus à l'aise (bleu), il est facile de montrer avec ce qui précède que

−le nombre de côté est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3, le nombre de côtés de la figure n est $c_n = 3 \times 4^{n-1}$,

−le périmètre est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 3, le périmètre de la figure n est donc

$$p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Aire (bleu) :
Le calcul de l'aire peut prendre plusieurs formes. Voici une proposition.

On peut de toute façon, dans un premier temps, pour ne pas trop se fatiguer, ne pas calculer l'aire de la figure 1 et calculer toutes les autres aires en fonction de celle-là. On l'appelle a. On a donc a = aire d'un triangle équilatéral de côté 1*. On note a_n l'aire de la figure n.

La construction de la figure 2 permet de dire que l'**aire de la figure 2** est la même que celle de la figure 1 mais à laquelle on a ajouté, pour chaque côté, un petit triangle équilatéral dont les côtés mesurent $\frac{1}{3}$. L'aire de chacun des petits triangles ajoutés est donc $\frac{1}{9}\times a$ (quand on multiplie par k les dimensions d'un objet son aire est multipliée par k^2). Il y a 3 petits triangles ajoutés (un par côté de la figure 1).
L'aire de la figure 2 vaut donc $a_2=a+3\times\frac{1}{9}a=\left(1+3\times\frac{1}{9}\right)\times a$.

De même, l'**aire de la figure 3** est la même que celle de la figure 2 mais à laquelle on a ajouté, pour chaque côté, un petit triangle dont les côtés sont encore divisés par 3. L'aire de chacun des petits triangles ajoutés est $\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{9}\times a\right)=\left(\frac{1}{9}\right)^2\times a$. Il y a 12 triangles ajoutés (un par côté de la figure 2).
L'aire de la figure 3 vaut donc $a_3=\left(1+3\times\frac{1}{9}\right)\times a+12\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times a=\left(1+3\times\frac{1}{9}+12\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)\times a$.

On peut continuer ainsi : pour $n\geqslant 2$, l'aire de la figure n est celle de la figure $n-1$ augmentée d'autant de petits triangles qu'il y avait de côtés dans la figure $n-1$, chacun de ces petits triangles ayant une aire de $\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\times a$.
[Rappel : le nombre de côté de la figure $n-1$ est $3\times 4^{n-2}$ (pour $n\geqslant 2$)]
Pour $n\geqslant 3$ on arrive à $a_n=\left(1+3\times\frac{1}{9}+12\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+...+3\times 4^{n-2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right)\times a$
qui s'écrit aussi $a_n=\left[1+\sum_{k=2}^{n}\left(3\times 4^{k-2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right)\right]\times a$

et en simplifiant un peu : $a_n=a+\frac{a}{3}\times\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-2}=a+\frac{a}{3}\times\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}=a+\frac{a}{3}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}$.

On peut conclure en observant le comportement à l'infini du périmètre et de l'aire :
−d'une part $\lim_{i\to+\infty} p_i=\lim_{i\to+\infty} 3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}=+\infty$
−et d'autre part $\lim_{i\to+\infty} a_i=a+\frac{a}{3}\times\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=a+\frac{a}{3}\times\frac{9}{5}=a+\frac{3a}{5}=\frac{8a}{5}$
On a donc une suite de figures dont le périmètre devient aussi grand que l'on veut (tend vers l'infini) et dont l'aire est limitée.

---

* Le calcul nombre a est laissé au lecteur, il est simple d'utiliser la formule de l'aire d'un triangle, ça nécessite un petit détour par le théorème de Pythagore.